1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Развитие современной физики (как теоретической, так и экспериментальной) во многом опирается на представление о множествах, обладающих нецелой размерностью. Понятие дробной (фрактальной) размерности было впервые сформулировано в работах Хаусдорфа и Безиковича, которым предшествовали исследования выдающихся математиков конца XIX - начала XX века, таких как Кантор, Вейерштрасс, Пеано, Кох, Серпинский. Основы топологической теории размерности были заложены замечательным советским математиком П. С. Урысоном, трагически погибшим в возрасте 26 лет в 1924 году. Обобщенная (дробная) размерность играет ключевую роль в абстрактной математике, например, в теории чисел.

Термин *фрактальная размерность* стал частью физического лексикона около 25 лет назад, начиная с фундаментальных работ Мандельброта по геометрии случайных процессов. Бесспорной заслугой Мандельброта признана демонстрация необычайно широкого круга явлений, приводящих к формированию фрактальных структур, а также оригинальное определение *фрактала* как *множества, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.* Классическими примерами фракталов являются изрезанные береговые линиии, случайные временные ряды, русла рек, траектории броуновских частиц, и др.

В настоящее время понятие фрактала воспринимается как одна из парадигм современной физики. Всплеск работ по фракталам затронул такие основополагающие направления как неравновесная термодинамика и космология, теория динамического хаоса и гидродинамической турбулентности, исследование фазовых переходов и транспортных явлений, физика космической и лабораторной плазмы.

Важный класс фрактальных объектов образуют множества, описывающие геометрию *протекания*, или *перколяции*. Под перколяцией в дальнейшем понимается случайное распространение *жидкости* через *среду*, причем абстрактные термины “жидкость” и “среда” могут быть интерпретированы в соответствии с физическим смыслом задачи. Перколяция является *критическим* процессом, т.е. подразумевает существование некоторого *порога*, ниже которого распространение жидкости ограничено конечной областью среды. Вблизи порога протекание происходит по фрактальному множеству, геометрия которого определяется исключительно законами критичности. Условие критичности приводит к независимости геометрических характеристик фрактала от микроскопических свойств среды. Данное явление может быть интерпретировано как *универсальность* фрактальной геометрии перколирующих множеств на пороге протекания. Наиболее яркая формулировка свойства универсальности известна как анзац Александера-Орбаха (АО) о равенстве спектральной размерности фрактального множества на пороге протекания значению $4/3$ во всех топологических (объемлющих) размерностях n не ниже 2. Доказательство анзаца АО в высоких размерностях $n \geq 6$ основано на теории среднего поля, апеллирующей к геометрии протекания на решетках Бете. (В низких размерностях $2 \leq n \leq 5$ применение теории среднего поля ограничено "деструктивным" влиянием петлевых структур, дающих неперенормируемый вклад в пропагатор на пороге протекания.)

С другой стороны, несмотря на столь бурный прогресс в исследовании фракталов, многие фундаментальные проблемы так и не были решены. Прежде всего, отсутствует математически полное и строгое определение фрактального множества. Поиск такого определения лежит в сфере приоритетов современной теории нерегулярных систем. Подробное обсуждение проблемы можно найти в монографии Енса Федера "Фракталы" (Москва, Мир, 1991).

Во-вторых, *аналитическое* доказательство (или опровержение) анзаца АО в низких размерностях $2 \leq n \leq 5$, ставшее настоящим камнем преткновения современной фрактальной геометрии, признано фундаментальной проблемой, пути решения которой в рамках традиционных представлений о фракталах представляются исчерпанными. Кризис идей в этой области побудил Шломо Хавлина и Даниеля бен-Аврахама назвать анзац АО вызовом всей теории протекания [подробнее об этом см. их монографию “Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems” (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000)].

В-третьих, такие принципиальные понятия как *индекс связности* и *спектральная размерность*, без которых невозможно точно сформулировать анзац АО, входят в теорию как феноменологические характеристики *динамических процессов* на фракталах, без четкой связи с *топологией фрактала* как такового. В самом деле, индекс связности обычно определяется либо через фрактальную размерность хаотических траекторий частиц, либо через скейлинг обобщенного коэффициента диффузии, что в любом случае требует искусственного перехода от геометрии к динамике. Аналогично, спектральная фрактальная размерность, как правило, вводится через плотность фрактонных состояний, описывающих поведение волновых процессов на фракталах. Намного более естественным, однако, представляется изначальное определение индекса связности и спектральной фрактальной размерности из *структурных свойств* фрактала, с последующим рассмотрением произвольных динамических процессов на основе единых геометрических принципов.

Наконец, отсутствует представление о том, сколько независимых параметров необходимо задать для полного описания геометрии фрактального множества. Естественными вопросами являются:

1. Можно ли установить отношение эквивалентности для фрактальных структур, обладающих одинаковыми значениями индекса связности и размерности Хаусдорфа-Безиковича?

2. Существуют ли преобразования фракталов, сохраняющие индекс связности и спектральную фрактальную размерность?

3. Существует ли набор "базисных фракталов", из которых бы строилось все многообразие фрактальных множеств?

Легко видеть, что проблемы, стоящие перед современной фрактальной геометрией, так или иначе имеют *топологическую природу*. Топологическое описание фракталов могло бы не только поставить причудливое здание фрактальной геометрии на прочную математическую основу, но и привести к более глубокому пониманию динамических процессов, протекающих на множествах дробной размерности.

Акцентируя внимание на топологии фрактальных структур, мы в первую очередь пытаемся осознать взаимосвязь между геометрическими и динамическими характеристиками системы. Такая взаимосвязь могла бы быть выражена через инварианты фрактального множества, что накладывало бы жесткие ограничения на поведение системы при заданных топологических параметрах. Анализ топологических ограничений мог бы дать ключ к построению *самосогласованной* динамической картины, учитывающей обратное влияние микроскопических процессов на то, что мы наблюдаем в макроскопическом масштабе. Выход на самосогласованный уровень описания динамических систем, основанный на систематическом исследовании их фундаментальных топологических свойств, является одной из приоритетных задач для нелинейной физики в целом.

Цель работы

Целью диссертационной работы является:

1. Построение последовательного топологического подхода к описанию фрактальных множеств, включая определение фрактала с позиций топологической теории многообразий и доказательство анзаца АО в модифицированной (исправленной) формулировке;

2. Исследование наиболее общих отношений между топологическими свойствами фрактальных многообразий и поведением микроскопических процессов в системах с обобщенной размерностью;

3. Применение полученных результатов к решению ряда принципиальных проблем, стоящих перед космической электродинамикой и теорией сильной турбулентности. К числу таких проблем отнесены:

а. Исследование кинетики неравновесных (квази)стационарных состояний, могущих существовать в сложных нелинейных динамических системах вдали от термодинамического равновесия; развитие альтернативного (термодинамического) подхода на основе представления об обобщенной энтропии; вычисление канонического распределения для термодинамических систем со слабыми мультипликативными корреляциями;

b. Построение самосогласованной кинетической модели турбулентного токового слоя, находящегося в основном неравновесном (квази)стационарном состоянии; одним из аспектов модели является объяснение структурной устойчивости хвоста магнитосферы Земли в областях с пренебрежимо малой регулярной составляющей магнитного поля, направленной по нормали к нейтральной плоскости; анализ явления магнитосферной суббури как топологического фазового перехода, связанного с разрушением основного состояния токового слоя; исследование спектральных свойств турбулентности в дальнем хвосте магнитосферы, а также в областях ближнего хвоста на ранних стадиях развития суббури;

c. Аналитический вывод фрактонной волновой функции для (квази)акустических возбуждений в перколирующих средах; анализ механизмов самоорганизации межпланетного магнитного поля и построение самосогласованной фрактонной модели турбулентного солнечного ветра; исследование спектральных свойств турбулентности в потоках быстрого и медленного ветра в контексте структурной и динамической (фрактонной) моделей.

Научная новизна

1. Впервые предложено систематическое применение гомотопической и дифференциальной топологии в исследованиях, касающихся геометрии фрактальных структур; показано, что синтез фрактальной геометрии и топологии приводит к ряду принципиально новых понятий, таких как *дробное топологическое произведение* и *фрактальное многообразие.* Впервые предложено общее определение фрактального множества с позиций топологической теории многообразий. В контексте топологического подхода введено понятие *перколяционной постоянной* $\mathcal{C}$ - фундаментальной геометрической константы, характеризующей универсальные свойства перколирующих фрактальных множеств на пороге протекания. Перколяционная постоянная определяется как наименьшее (из двух возможных) решение трансцендентного уравнения

$$\mathcal{C}\frac{\pi^{\mathcal{C}/2}}{\Gamma(\mathcal{C}/2+1)} = \pi, \qquad (1)$$

а ее численное значение составляет $\mathcal{C} \approx 1.327$. [Символ Γ в уравнении (1) обозначает гамма-функцию Эйлера.] Впервые предложена модифицированная формулировка анзаца АО в терминах перколяционной постоянной $\mathcal{C}$; сделанное утверждение доказано в виде *Основной теоремы об универсальности.* Следствиями основной теоремы являются *теорема о фрактальной границе* и *теорема о множестве нулей*; обе теоремы сформулированы и доказаны впервые.

2. Впервые получено общее выражение для коэффициента турбулентного переноса в стохастических гамильтоновых системах с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы в зависимости от фрактальной размерности хаотических траекторий частиц; исследовано аномальное поведение коэффициента переноса по числу Кубо; найдено точное значение индекса Кубо при известной фрактальной размерности траекторий; дан подробный анализ важнейших частных случаев, отвечающих следующим процессам: субдиффузии в стационарном гамильтоновом поле; аномальной диффузии в широких стохастических "морях;" баллистическим переносам, обусловленным полетами Леви; супердиффузии в режиме самоорганизованной критичности.

3. Впервые дано систематическое объяснение явлению универсальной ас проводимости перколирующих фрактальных сетей вблизи порога протекания во всех объемлющих размерностях от 2 до 5; исследован скейлинг коэффициента ас проводимости по частоте, а также температурная зависимость индекса проводимости на аномальных частотах; предсказано явление "гиперуниверсальной" ас проводимости для плоских сетей, названное "законом одной трети."

4. Впервые предложено нелинейное дробное кинетическое уравнение, описывающее процессы самосогласованного ускорения частиц в турбулентных средах вблизи основного неравновесного (квази)стационарного состояния системы; получено автомодельное решение дробного уравнения, отвечающее нетепловому хвосту в распределении частиц по энергиям; параметры распределения находятся в тесном согласии с данными непосредственных измерений турбулентной плазмы в хвосте магнитосферы Земли.

5. Впервые предложен термодинамический анализ неравновесных (квази)стационарных состояний на основе представления об обобщенной энтропии; показано, что каноническим распределением для состояний со слабыми мультипликативными корреляциями является хорошо известное в космической электродинамике "каппа" распределение; отмечено, что нетепловой хвост каппа распределения соответствует автомодельному решению дробного кинетического уравнения.

6. Впервые построена самосогласованная кинетическая модель турбулентного токового слоя, находящегося в основном неравновесном (квази)стационарном состоянии; впервые предложена топологическая модель магнитосферной суббури как фазового перехода из основного состояния, обладающего перколяционными симметриями, на возбужденный уровень, лежащий существенно выше порога протекания в системе.

7. Впервые сформулировано и решено дробное кинетическое уравнение для фрактонов - (квази)акустических возбуждений на перколирующих фрактальных сетях; получены топологические ограничения на параметры фрактонной волновой функции как в центральной, так и в хвостовой частях распределения; впервые предложена фрактонная модель турбулентного межпланетного магнитного поля, описывающая самосогласованное формирование крупномасштабных фрактальных структур в поле нелинейных фрактонных возбуждений.

8. Впервые с единых позиций предложено объяснение спектральных свойств турбулентности в солнечном ветре и хвосте магнитосферы

Земли; предсказан эффект почернения шумов в хвосте магнитосферы в области высоких частот.

Научная и практическая ценность

Научная ценность работы заключается в развитии последовательного топологического подхода к исследованию множеств с нерегулярной пространственной структурой. В основе предлагаемого подхода лежит синтез "традиционной" фрактальной геометрии с топологической теорией многообразий. Систематическое применение топологических методов приводит к понятию *перколяционной постоянной* $\mathcal{C} \approx 1.327$ - фундаментального параметра, определяющего минимальное дробное число степеней свободы, допускающее построение бесконечного линейно связного фрактального множества. *Основная теорема об универсальности*, утверждающая равенство спектральной размерности стягиваемого фрактала на пороге протекания значению перколяционной постоянной $\mathcal{C} \approx 1.327$, ставит точку в проблеме аналитического доказательства (или опровержения) анзаца АО в объемлющих размерностях от 2 до 5; тем самым решается одна из крупнейших проблем в современной теории протекания. В контексте теории турбулентности *Основная теорема об универсальности* приводит к ряду общих результатов относительно геометрии неравновесных (квази)стационарных состояний, могущих существовать в сложных открытых термодинамических системах вдали от теплового равновесия. Среди важнейших приложений топологической теории фракталов отметим:

1. самосогласованную модель турбулентного токового слоя, включая объяснение структурной устойчивости хвоста магнитосферы Земли в областях с пренебрежимо малой нормальной компонентной магнитного поля, а также модель магнитосферной суббури как топологического фазового перехода на перколирующей фрактальной сети;

2. объяснение универсальной ас проводимости перколирующих фрактальных сетей и предсказание "закона одной трети."

Результаты, связанные с ас универсальностью, могут применяться для поиска нетрадиционных сверхпроводящих материалов с высокой температурой перехода (вплоть до 150 К) (подробнее об этом см. оригинальную работу [24]). Значения коэффициентнов турбулентного переноса, полученные в [18], имеют непосредственное отношение к проблеме удержания плазмы в магнитных ловушках и осуществлению программы управляемого термоядерного синтеза. Актуальность данного направления отражена в международном проекте ITER.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах в Институте космических исследований РАН; Институте земного магнетизма и радиоволн РАН; Научно-исследовательском институте ядерной физики МГУ; Факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ; Государственном астрономическом институте имени Штенберга МГУ; Университете Калабрии (Козенца, Италия); Институте физики плазмы "Пьеро Калдирола" (Милан, Италия); Национальной лаборатории Ризё (Роскилль, Дания); Международном центре теоретической физики в Триесте (Италия); на рабочей группе по теории и наблюдениям нелинейных процессов в околоземном пространстве (Варшава, Польша, 1995); международном симпозиуме по космической плазме (Гамильтон, Бермудские острова, 1995); международной школе по космической физике (Лаквила, Италия, 1996); международных конференциях "Дни Динамики" (Лион, Франция, 1996) и "Современные проблемы астрофизики" (Москва, Россия, 1997); Российско-Итальянских симпозиумах по нелинейным процессам в космической и лабораторной плазме (Звенигород, Россия, 1998; Конобеево, Россия, 2002); Международной ассамблее геодезии и геофизики (Бирмингем, Великобритания, 1999); Европейских конференциях по теории термоядерного синтеза (Комо, Италия, 1999; Элсинёр, Дания, 2001); международной рабочей группе по стохастическим процессам переноса в сложных нелинейных динамических системах (Карри-ле-Руэ, Франция, 2000; 2002); ряде других.

Публикации

В основу диссертации положены работы [1–25], привиденные в конце автореферата. Полный список печатных работ автора по тематике диссертации (в рецензируемых изданиях) содержит 35 статей.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения; содержит 257 страниц основного текста и 16 рисунков; список литературы включает 223 названия.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дан краткий обзор современного состояния исследований, связанных с применением фрактальной геометрии в современной теоретической физике, а также выделены наиболее острые проблемы, решению которых посвящена диссертационная работа.

В **первой главе** приведено последовательное изложение топологической теории фрактальных структур в свете оригинальных работ [10,15,20,24]. Материал разбит на три раздела по следующему плану:

В разделе 1.1. дано аксиоматическое определение важнейших геометрических характеристик фрактала: Хаусдорфовой размерности d_f, индекса связности θ и спектральной размерности $d_s = 2d_f/(2+\theta)$, а также введены понятия дробного евклидова пространства и фрактального многообразия.

В разделе 1.2. сформулирована и доказана *Основная теорема об универсальности* в следующей формулировке:

Основная теорема об универсальности: *Спектральная размерность стягиваемого фрактального множества на пороге протекания равна $\mathcal{C} \approx 1.327$ для всех $2 \leq n \leq 5$.*

Величина $\mathcal{C}$ определена тождеством (1). *Основная теорема об универсальности* возводит значение $\mathcal{C}$ в ранг фундаментальной топологической константы, характеризующей наиболее общие свойства перколирующих фрактальных множеств во всех объемлющих размерностях от 2 до 5. Следуя оригинальной работе [15], для обозначения $\mathcal{C}$ мы предлагаем термин "перколяционная постоянная."

Доказательство *Основной теоремы об универсальности* разбито на "легкую" и "трудную" части. Доказательство легкой части требует предварительного введения таких нестандартных понятий как (замкнутый) d_s-мерный дробный шар $\bar{D}^{d_s}$ и (d_s-1)-мерная дробная сфера S^{d_s-1} (представляющая собой топологическую границу шара $\bar{D}^{d_s}$). Дробная сфера S^{d_s-1} может быть построена как образ стягиваемого перколирующего фрактального множества при диффеоморфном отображении с дробным якобианом. Центральный момент заключается в построении пути $\tilde{\gamma}$, всюду плотно покрывающего сферу S^{d_s-1} вместе с внутренней областью D^{d_s}. Легко видеть, что $\tilde{\gamma}$ опирается на тот же самый телесный угол, что и весь шар $\bar{D}^{d_s}$; данный угол, однако, не может быть меньше π. Последнее утверждение следует из рассмотрения всевозможных непрерывных деформаций кривой $\tilde{\gamma}$, концы которой закреплены на противоположных полюсах сферы S^{d_s-1}. Принимая во внимание, что шар $\bar{D}^{d_s}$ опирается на телесный угол

$$\Omega_{d_s} \equiv d_s \frac{\pi^{d_s/2}}{\Gamma(d_s/2+1)}, \tag{2}$$

находим $\Omega_{d_s} \geq \pi$. С другой стороны, условие критичности требует $\Omega_{d_s} = \min$ на пороге протекания, откуда $\Omega_{d_s} = \pi$. Из полученного соотношения очевидно тождество (1). Вложения дробных сфер в евклидово пространство E^n обсуждаются в трудной части теоремы, где получено общее ограничение $2 \leq n \leq 5$ на топологическую размерность n. Доказательство ограничения $2 \leq n \leq 5$ основано на построении гладкого двумерного многообразия, "обволакивющего" $\bar{D}^{d_s}$, с последующим применением слабой теоремы Уитни о вложениях.

Далее в разделе 1.2. показано, что эффекты нестягиваемости приводят к отклонению спектральной размерности d_s от $\mathcal{C}$ в *меньшую* сторону в относительных пределах порядка одного процента. Данный вывод проверен в численных экспериментах, посвященных исследованию фрактальных свойств изолиний в сечениях случайных броуновских поверхностей (подробнее об этом см. раздел 1.3.).

Поскольку значение перколяционной постоянной $\mathcal{C}$ отлично от 4/3, *Основная теорема об универсальности* опровергает анзац АО в первоначальной формулировке (то есть о равенстве спектральной размерности d_s значению 4/3 во *всех* объемлющих размерностях n начиная с 2). Можно сказать, что анзац АО справедлив лишь в высоких размерностях $n \geq 6$, где выполняется приближение среднего поля. Отклонение величины C от $4/3$ в низких размерностях $2 \leq n \leq 5$ обеспечивает сходимость ренорм-группового разложения термодинамических величин в точке перколяционного перехода.

В разделе 1.3. доказан ряд следствий из *Основной теоремы об универсальности*, позволяющих не только глубже понять основные свойства фрактальных многообразий, но и получить готовые рецепты для последующего применения в физических моделях. Среди важнейших следствий отметим *теорему о фрактальной границе* и *теорему о множестве нулей*:

<u>*Теорема о фрактальной границе:*</u> *На пороге протекания дробная сфера S^{d_s-1} всюду плотна в шаре $\bar{D}^{d_s}$.*

Другими словами, фрактальное множество D^{d_s} на пороге протекания обладает "чрезвычайно разветвленной границей." Данное свойство заранее не очевидно и подчеркивает специфику многообразий S^{d_s-1} и $\bar{D}^{d_s}$. *Теорема о фрактальной границе* приводит к ряду топологических ограничений на Хаусдорфову размерность перколирующих фрактальных структур на пороге протекания.

<u>*Теорема о множестве нулей:*</u> *Пусть $\psi(\mathbf{r})$ - статистически однородное изотропное случайное скалярное поле с областью определения $\{\mathbf{r}\} \sim E^n$, где $n \geq 2$, и пусть поля $\psi(\mathbf{r})$ и $-\psi(\mathbf{r})$ статистически эквивалентны, т.е. выполняется свойство знаковой симметрии. Пред-*

полагается условие невырожденности $|\nabla\psi(\mathbf{r})| \neq 0$ *почти для всех* $\mathbf{r}$. *Тогда множество нулей поля* $\{\psi(\mathbf{r}) = 0\}$ *содержит перколирующее подмножество.*

Теорема о множестве нулей позволяет получить независимую оценку перколяционной постоянной $\mathcal{C}$ из фрактальной размерности изолиний случайных функций.

Переход от топологии к физике осуществляется во **второй главе**, содержащей анализ странных (негауссовых) процессов переноса в турбулентных средах. Действительно, в открытых нелинейных динамических системах могут существовать *неравновесные стационарные состояния* (НСС), обладающие высокой степенью "внутренней" когерентности. Поведение системы вблизи НСС обусловлено сложным взаимодействием эффектов динамической *релаксации* с обменными процессами, отвечающими за *самоорганизацию* среды. Геометрия НСС представляет собой фрактал, занимающий лишь некоторую часть (скажем, некоторое *подпространство*) объемлющего евклидова пространства E^n. Структурная устойчивость НСС как фрактального образования поддерживается за счет многомасштабных *корреляций*, играющих доминирующую роль в режиме сильной нелинейности. Корреляции самосогласованным образом "подстраивают" кинетику НСС под фрактальную геометрию системы. Фрактальность, в свою очередь, обнаруживает себя в *странном* (негауссовом) поведении кинетических процессов, "искаженных" корреляциями. Стабилизация системы вблизи НСС воспринимается сторонним наблюдателем как переход в *турбулентное состояние*, ограничивающее крупномасштабные эволюционные явления.

Во многих случаях термодинамически выгодными оказываются НСС, фрактальная геометрия которых соответствует перколяционным структурам на пороге протекания. Данный вывод основывается, в частности, на исследовании спектральных свойств турбулентности в хвосте магнитосферы Земли. Применение *Основной теоремы об универсальности* позволяет немедленно определить спектральную размерность множества, к которому стремятся траектории частиц по мере стабилизации системы:

$$d_s \to \mathcal{C} \approx 1.327. \tag{4}$$

Как показано в разделах 2.1.–2.3., условие (4) приводит к "соотношению пропорциональности" между индексами дифференцирования по временной и фазовой переменным в дробном кинетическом уравнении для самосогласованного распределения вероятностей найти частицу в точке ξ в момент времени t. Соотношение пропорциональности отражает пространственно-временные корреляции в системе вблизи НСС.

В разделе 2.4. исследован широкий класс странных процессов переноса в стохастических гамильтоновых системах с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы. Получено общее выражение для коэффициента турбулентного переноса из динамических параметров, описывающих расходимость ансамбля фрактальных траекторий частиц. Полученные результаты охватывают такие явления как субдиффузия частиц в стационарном гамильтоновом поле; аномальная диффузия в режиме сильной стохастичности; баллистические переносы, отвечающие блужданиям Леви; супердиффузия вблизи самоорганизованной критичности. Приведено подробное сравнение с известными экспериментальными данными по явлениям переноса в турбулентной плазме, включая лабораторные и космические приложения. Исследована аномальная степенная зависимость коэффициента турбулентного переноса от числа Кубо. Найдено общее алгебраическое выражение для индекса Кубо через фрактальную размерность стохастических траекторий. Значение индекса Кубо для диффузионных траекторий составляет 2/3.

Наконец, в разделе 2.5. обсуждается явление универсальной ас проводимости перколирующих фрактальных сетей на пороге протекания. (Как и выше, свойство универсальности трактуется в контексте *Основной теоремы.*) Показано, что коэффициент ас проводимости зависит от приложенной частоты по степенному закону с показателем

$$\eta = (2 - \mathcal{C})/2 + (n - 2)\mathcal{C}/2d_f, \tag{5}$$

причем значение параметра $d_f \geq 1$ ограничено сверху размерностью канторова сыра в E^n, а размерность пространства вложения меняется в пределах от 2 до 5. Ограничение на d_f вытекает из *теоремы о фрактальной границе.* Выражение (5) с большой точностью объясняет поведение объемной ($n = 3$) ac проводимости аморфных веществ с нерегулярной молекулярной структурой. Для плоских сетей ($n = 2$) показатель η не зависит от Хаусдорфовой размерности d_f:

$$\eta = (2 - \mathcal{C})/2 \sim 1/3 \qquad (n = 2). \tag{6}$$

Результат (6) назван "законом одной трети" и рассматривается как теоретическое предсказание фрактальной модели. Закон одной трети мог бы применяться к описанию ac проводимости тонких пленок из аморфных веществ, а его экспериментальная проверка могла бы пролить свет на механизм прохождения переменного электрического тока через неупорядоченные среды.

Третья глава посвящена исследованию механизмов поддержания нетепловых распределений частиц по энергиям вблизи НСС. В самом деле, переход турбулентной системы к НСС во многих случаях связан с появлением популяции горячих частиц, распределение которых по энергиям имеет степенной вид

$$\Psi(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{-\mu}. \tag{7}$$

Стоящая здесь энергия частиц $\mathcal{E}$ предполагается большой по сравнению с характерной "температурой" ансамбля T. Заметим, что величина T может не иметь смысла температуры в традиционном понимании. Распределение (7) часто называют "нетепловым хвостом," подчеркивая существование протяженного "шлейфа" состояний с высокой энергией, вероятности которых экспоненциально малы в статистике Максвелла-Больцмана:

$$\Psi(\mathcal{E}) \propto \exp\left[-\mathcal{E}/T\right]. \tag{8}$$

Нетепловые функции распределения (7) являются неотъемлемой чертой турбулентной плазмы; в качестве примеров укажем популяции, образующие плазменный слой магнитосферы Земли, а также частицы, приходящие к Земле в форме космических лучей.

Можно предположить, что наклон нетеплового хвоста μ связан с фундаментальными явлениями, лежащими в основе нелинейной динамики НСС. Действительно, процессы динамической релаксации, играющие, наравне с эффектами самоорганизации среды, первостепенную роль в формировании НСС, подразумевают обмен энергией между различными подсистемами, входящими в турбулентный ансамбль. К таким подсистемам обычно относят турбулентные поля, взаимодействующие как между собой, так и с захваченными в них частицами; при этом токи, создаваемые частицами, могут быть сами источниками турбулентного поля. Система напоминает "кипящий котел" из частиц и полей, "уравновешивающих" друг друга вблизи НСС. Адекватное описание турбулентного ансамбля требует учета многомасштабных пространственно-временных корреляций и может быть отнесено к компетенции так называемой дробной кинетики. Изложение соответствующего подхода в контексте оригинальных работ [19,25] представлено в разделах 3.1.–3.2.

Ключевым звеном является нелинейное дробное кинетическое уравнение, учитывающее процессы "воспроизводства" турбулентности частицами, испытывающими рассеяние на сгустках поля. Подчеркнем, что сгустки могут некоторым когерентным образом перемещаться в пространстве, например, участвовать в обобщенном броуновском движении (персистентном или антиперсистентном). Рассеяние частиц в этом случае сопровождается медленным разогревом плазмы; процесс напоминает стохастическое ускорение Ферми, однако существенным образом "искажается" корреляциями в системе. Разогрев плазмы на сгустках, совершающих обобщенное броуновское движение, назван в разделе 3.1. "странным ускорением Ферми." В отличие от "обычного" стохастического ускорения, странные ускорения не требуют гауссова распределения рассеивающих центров по скоростям; при этом время корреляции для странных ускорений равно бесконечности. В самосогласованном режиме ускоренные частицы тратят полученную энергию на воспроизводство турбулентного поля. Эффект соответствует нелинейному члену в кинетическом уравнении, стоящему на месте источника поля (раздел 3.2.). Как следует из кинетического уравнения с самосогласованным источником, вблизи основного неравновесного (квази)стационарного состояния функция распределения частиц плазмы по энергиям содержит протяженный нетепловой хвост степенного вида, показатель которого меняется в пределах от $\mu_{\min} = 6$ до $\mu_{\max} = 7$ в зависимости от типа корреляций (персистентных или антиперсистентных) в системе. Приведенные значения отражают фундаментальные характеристики неравновесных полей и плазмы, образующих самосогласованный ансамбль в турбулентных токовых слоях (например, хвосте магнитосферы).

Далее, в разделах 3.3.–3.4. исследованы общие термодинамические свойства нетепловых функций распределения на основе представления об обобщенной энтропии. Получено каноническое распределение для состояний со слабыми мультипликативными корреляциями, совпадающее с хорошо известным в космической электродинамике “каппа” распределением. [Напомним, что каппа распределение содержит нетепловой хвост вида (7); при этом значение параметра каппа на единицу меньше показателя μ.] Обсуждается соответствие каппа распределений процессам самосогласованного ускорения частиц в области турбулентности. Полученные результаты позволяют связать воедино метод нелинейного дробного кинетического уравнения (разделы 3.1.–3.2.) и нетрадиционный термодинамический подход, апеллирующий к концепции обобщенной энтропии (разделы 3.3.–3.4.). Представлено подробное сравнение выводов теории с данными наблюдений, в частности, с известными значениями параметра каппа для плазменного слоя магнитосферы Земли.

Ряд конкретных проблем, стоящих перед современной космической электродинамикой, обсуждается в **четвертой главе**. Речь в ней идет о спектральных свойствах НСС в различных диапазонах частот (раздел 4.1.); далее рассмотрены самосогласованная модель турбулентного токового слоя (раздел 4.2.) и динамическая фрактонная модель межпланетного магнитного поля (в контексте неустойчивости магнитозвуковых фрактонных мод по отношению к самосжатию) (раздел 4.3.).

Задача о турбулентном токовом слое (раздел 4.2.) тесно связана с объяснением структурной устойчивости хвоста магнитосферы Земли в областях с пренебрежимо малой регулярной составляющей магнитного поля, направленной по нормали к нейтральной плоскости. В формальной записи

$$B_n \ll B_0, \tag{9}$$

где B_n суть регулярная нормальная компонента поля, а B_0 обозначает характерное магнитное поле в лобах. Условие (9) выполняется в дальнем хвосте магнитосферы ($x \lesssim -10^2 R_З$), а также в областях развития магнитосферной суббури ($x \sim -10 R_З$) на стадии, когда происходит локальное утоньшение и вытягивание магнитной конфигурации хвоста. Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь не идет о хорошо известных ламинарных режимах, когда хвост напоминает гладкую деформацию дипольного поля Земли; в последнем случае структурная устойчивость хвоста достигается за счет нормальной компоненты $B_n \sim B_0$, стабилизирующей регулярную токовую систему. При значительном уменьшении нормального поля ламинарная конфигурация хвоста теряет устойчивость вследствие возникновения многомасштабных турбулентных течений; переход к турбулентности обусловлен развитием ряда нестабильностей, например, потоковых. Сильная многопотоковая турбулентность представляет собой иерархическую сеть из токовых струй, хаотически разбросанных по нейтральной плоскости хвоста. Изгибание и ветвление струй приводит к образованию сложных мозаик из сгустков турбулентного магнитного поля, "попавшего" в токовые сети. Иерархии токов и полей вблизи основного неравновесного состояния турбулентной системы образуют электродинамически согласованные фрактальные конфигурации. При кинетическом описании сгустки турбулентного магнитного поля можно рассматривать как рассеивающие центры, препятствующие быстрому прохождению заряженных частиц через токовый слой. Рассеяние частиц на сгустках ограничивает амплитуду электрического тока поперек хвоста; тем самым достигается турбулентное устойчивое состояние, обеспечивающее стабилизацию электродинамического ансамбля вблизи НСС. Важно подчеркнуть, что сгустки турбулентного поля образуются за счет тех самых частиц, которые испытывают рассеяние на магнитных неоднородностях: флуктуации тока, обусловленные процессом рассеяния, являются источниками турбулентного поля, рассеивающего частицы. Данный эффект возвращают нас к нелинейному кинетическому уравнению, исследованному в разделе 3.2.

Показано, что стационарная конвекция фрактальных мозаик воспринимается неподвижным наблюдателем как самоаффинные вариации поля во времени; при этом спектр флуктуаций имеет степенной вид с показателем, зависящим от Хаусдорфовой размерности турбулентного поля (раздел 4.1.). По известным (из электродинамики токового слоя) значениям Хаусдорфовой размерности вблизи НСС в разделе 4.2. расчитаны показатели спектров для флуктуаций турбулентного магнитного поля, плотности тока и поля скоростей. Особое внимание уделено поведению спектров на низких частотах, где конвективные процессы искажаются собственной динамикой фрактальных мозаик (например, участием сгустков в обобщенном броуновском движении). Считая броуновское движение сгустков медленным по сравнению с конвекцией, показано возникновение универсального спектра динамических флуктуаций, напоминающего низкочастотный розовый ("фликкер") шум в системе. Далее в разделе 4.2. построена модель магнитосферной суббури как топологического фазового перехода на фрактальной сети со скачком размерности вложения. Данная модель приводит к ряду интригующих аналогий с инфляционной стадией расширения Вселенной. Основные заключения модели (такие как эффект расщепления тока выше порога протекания) проверены в численном эксперименте, основанном на приближении турбулентного поля фрактальными броуновскими функциями. Представлено детальное сравнение выводов теории с данными непосредственных наблюдений магнитоплазменной турбулентности в хвосте магнитосферы. Среди важнейших предсказаний модели отметим эффект почернения шумов на средних частотах перед самым началом суббури.

В разделе 4.3. рассмотрены коллективные вибрационные возбуждения, соответствующие колебательным степеням свободы на фрактальных мозаиках из сгустков турбулентного магнитного поля. Данные возбуждения отождествлены с магнитоакустическими фрактонными модами, отвечающими нелинейному дисперсионному соотношению, параметры которого зависят от индекса связности турбулентной среды. Показано, что фрактонная волновая функция является решением дробного уравнения Шредингера с оператором Райца-Вейля вместо обычного лапласиана. При известных ограничениях на индекс связности решение дробного уравнения записано через функции Миттага-Леффлера; исследованы асимптотики фрактонных мод при малых и больших значениях пространственной переменной. Обсуждаются (на качественном уровне) неустойчивости фрактонных мод по отношению к самосжатию. Показано, что нелинейная стабилизация фрактонных возбуждений возможна при переходе к универсальным фрактальным мозаикам, Хаусдорфова размерность которых совпадает с постоянной протекания $\mathcal{C} \approx 1.327$. По-видимому, данный эффект работает в потоках турбулентного солнечного ветра, где отвечает за формирование фрактальной структуры межпланетного магнитного поля. Спектральные свойства поля, рассчитанные на основе фрактонной модели, хорошо согласуются с данными непосредственных измерений с борта космических аппаратов.

Принципиальные моменты, изложенные в работе, суммированы в **Заключении**.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Концепция *фрактального многообразия* является ключем к построению аксиоматической теории множеств, обладающих нецелой размерностью. В основе аксиоматического подхода лежат топологические методы, подчиненные общим идеям фрактальной геометрии. Связующее звено заключается в исследовании *отношений эквивалентности* между фрактальными структурами, например, диффеоморфных отображений с дробным порядком гладкости. К важнейшим топологическим свойствам фрактальных множеств относится сохранение индекса связности при взаимно однозначных взаимно непрерывных деформациях (гомеоморфизмах). Синтез фрактактальной геометрии и топологии открывает путь к развитию нового научного направления - *фрактальной топологии*, перспективы которого охватывают как абстрактную математику, так и теоретическую физику.

2. Важнейшими примерами фрактальных многообразий служат *дробное евклидово пространство* E^{d_s}, диффеоморфное *открытому дробному шару* D^{d_s}, а также *дробная сфера* S^{d_s-1}, представляющая полную *фрактальную границу* шара D^{d_s}. Многообразия D^{d_s} и S^{d_s-1} описывают топологию *перколяции*, или *протекания*, в статистически однородных изотропных системах. На пороге протекания шар D^{d_s} опирается на телесный угол, равный π во всех объемлющих размерностях n от 2 до 5; спектральная размерность d_s шара D^{d_s} равна при этом *постоянной протекания* $\mathcal{C} \approx 1.327$. Постоянная протекания $\mathcal{C}$ определяет минимальное дробное число степеней свободы, необходимых частице для достижения бесконечно удаленной точки при случайных блужданиях в пространстве E^n $(2 \leq n \leq 5)$. Параметр $\mathcal{C}$ имеет чисто топологическую природу, отражающую универсальные (не зависящие от физической природы системы) структурные свойства перколирующих фрактальных множеств. Сделанные утверждения доказаны в виде *Основной теоремы об универсальности.* Основная теорема играет центральную роль в исследовании фундаментальных топологических свойств фрактальных объектов, связанных с критическими явлениями в случайных средах. К другим важным топологическим теоремам необходимо отнести *теорему о фрактальной границе*, следствием которой является совпадение Хаусдорфовых размерностей шара D^{d_s} и сферы S^{d_s-1} на пороге протекания, а также *теорему о множестве нулей*, утверждающую существование перколирующих фрактальных множеств в плоских сечениях случайных функций.

3. С топологией протекания связана структура сильной турбулентности вблизи основного неравновесного стационарного состояния (НСС). Переход к НСС является сложным компромиссом между механизмами самоорганизации, определяющими ход эволюционных процессов в системе, и эффектами динамической релаксации, отражающими роль диссипативных факторов в среде. Во многих случаях термодинамически выгодными оказываются НСС, геометрия которых отвечает условиям протекания вблизи порога. Применение *Основной теоремы об универсальности* позволяет немедленно получить значение спектральной фрактальной размерности для турбулентного ансамбля: $d_s = \mathcal{C} \approx 1.327$. Ограничения на Хаусдорфову размерность и индекс связности вытекают из *теоремы о фрактальной границе.* Данный подход является совершенно общим и не требует каких либо специальных предположений относительно физической природы НСС. В контексте НСС постоянную протекания $\mathcal{C} \approx 1.327$ можно рассматривать как универсальный параметр, характеризующий фундаментальные свойства турбулентного состояния. Подчеркнем, что для решения казалось бы чисто физической проблемы - исследования неравновесных стационарных состояний в динамических системах с сильной турбулентностью - нам пришлось одновременно развить математический аппарат, определив такие понятия как фрактальное многообразие, дробное топологическое произведение и постоянная протекания. Теория сильной турбулентности попадает, таким образом, под юрисдикцию фрактальной топологии. Последнее обстоятельство лежит в основе *геометрического* описания турбулентности, предложенного в [21,12,22].

4. Фрактальность непосредственно отражаются на кинетике турбулентного ансамбля. В игру вступают "странные" динамические процессы, не имеющие аналогов в квазилинейной теории; отметим негауссовы явления переноса, ускорения во фрактальном времени, возбуждение фрактонных мод, и др. Странным динамическим процессам отвечают обобщенные кинетические уравнения, содержащие производные *дробного* порядка (как по времени, так и по фазовым переменным). Как правило, порядок дифференцирования зависит от индекса связности фрактального поля; последнее обстоятельство гарантирует переход к обычным целым уравнениям в евклидовых пространствах. Анализ дробных кинетических уравнений на фрактальных многообразиях открывает путь к *самосогласованному* описанию сильной турбулентности. Действительно, *условия согласования* могут быть выражены в виде алгебраических соотношений между Хаусдорфовой фрактальной размерностью и индексом связности фрактальной структуры. Комбинируя условия согласования с известным значением спектральной фрактальной размерности $d_s = \mathcal{C} \approx 1.327$ турбулентного ансамбля вблизи порога протекания, можно получить все необходимые параметры (включая обобщенные индексы дифференцирования) в окончательном численном виде. Решение дробных кинетических уравнений с индексами дифференцирования, зависящими от фрактальных свойств среды, завершает построение самосогласованной картины турбулентного поля. Демонстрациями данного метода являются: 1) фрактонная модель турбулентности солнечного ветра; 2) самосогласованная фрактальная модель турбулентного токового слоя в хвосте магнитосферы Земли, включая модель магнитосферной суббури и модель самосогласованного ускорения Ферми.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. *Основная теорема об универсальности* и определение перколяционной постоянной;

2. Другие топологические теоремы: *теорема о фрактальной границе* и *теорема о множестве нулей*;

3. Коэффициенты турбулентного переноса для стохастических гамильтоновых систем с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы;

4. Объяснение эффекта ас универсальности и предсказание “закона одной трети;”

5. Нелинейное дробное кинетическое уравнение для турбулентных магнитоплазменных систем вблизи основного неравновесного (квази)стационарного состояния, включая автомодельные решения, соответствующие нетепловому хвосту в распределении частиц по энергиям;

6. Самосогласованная фрактальная модель турбулентного токого слоя, включая исследование спектральных свойств турбулентности и построение топологической модели магнитосферной суббури;

7. Самосогласованная динамическая модель турбулентного солнечного ветра, включая дробное волновое уравнение для фрактонных возбуждений и вычисление фрактонной волновой функции.

Литература

[1] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Applications of fractal geometry to dynamical evolution of sunspots*, Phys. Fluids. B. **5**, 2609-2615 (1993).

[2] A. V. Milovanov, *Fracton excitations in percolating networks: Fractional wave equation and superfluidity of He-4*, Preprint IKI No 1906. Space Research Institute, Moscow, 1994.

[3] А. В. Милованов, *Сферические звездные скопления с массивным ядром: Фрактальные структуры на гомологической стадии эволюции*, Письма в Астрон. Журн. **20**, 501-506 (1994).

[4] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Development of fractal structure in the solar wind and distribution of magnetic field in the photosphere*, in *Solar System Plasmas in Space and Time: Geophysical Monograph* **84**, edited by J. L. Burch, and J. H. Waite (American Geophysical Union, Washington, DC, 1994), pp. 43-52.

[5] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Percolation of a plasma across magnetic field with "braided" lines: Finite Larmor radius effects*, in *Physics of the Magnetopause. Geophysical Monograph* **90**, edited by P. Song, B. U. O. Sonnerup, and M. F. Thomsen (American Geophysical Union, Washington, DC, 1995), pp. 357-362.

[6] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Fracton excitations in the solar wind and power-law spectra of the IMF fluctuations*, Phys. Space Plasmas **14**,

373-386 (1995).

[7] Л. М. Зеленый и А. В. Милованов, *Крупномасштабные магнитные конфигурации на фрактальных множествах: Приближение бессилового поля*, Астрон. Журн. **73**, 805-811 (1996).

[8] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi and G. Zimbardo, *Fractal structures and power-law spectra in the distant Earth's magnetotail*, J. Geophys. Res. **101**, 19,903 - 19,910 (1996).

[9] А. В. Милованов, Л. А. Аванов, Г. Н. Застенкер, Л. М. Зеленый, *Мультифрактальные свойства турбулентности солнечного ветра: Теория и наблюдения*, Космич. Исслед. **34**, 451-456 (1996).

[10] A. V. Milovanov, *Topological proof for the Alexander-Orbach conjecture*, Phys. Rev. E **56**, 2437-2446 (1997).

[11] Л. М. Зеленый и А. В. Милованов, *Динамическая модель флуктуаций межпланетного магнитного поля: Фрактонные возбуждения и степенные спектры*, Геомагнетизм и Аэрономия **37**, 1-13 (1997).

[12] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Fracton excitations as a driving mechanism for the self-organized dynamical structuring in the solar wind*, Astrophys. Space Sci. **264**, 317-345 (1998).

[13] L. M. Zelenyi, A. V. Milovanov and G. Zimbardo, *Multiscale magnetic structure of the distant tail: Self-consistent fractal approach*, in *New*

Perspectives on the Earth's Magnetotail: Geophysical Monograph **105**, edited by A. Nishida, D. N. Baker, and S. W. H. Cowley (American Geophysical Union, Washington, DC, 1998), pp. 321-339.

[14] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Functional background of the Tsallis entropy: "coarse-grained" systems and "kappa" distribution functions*, Nonl. Proc. Geophys. **7**, 211-221 (2000).

[15] A. V. Milovanov and G. Zimbardo, *Percolation in sign-symmetric random fields: Topological aspects and numerical modeling*, Phys. Rev. E **62**, 250-260 (2000).

[16] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi and G. Zimbardo, *Magnetospheric substorm onset: Topological phase transition on a critical percolating network*, Proc. 5th International Conference on Substorms, St. Petersburg, Russia, 16-20 May, 2000. ESA SP 443, July 2000, pp. 183-188.

[17] G. Zimbardo, A. Greco, P. Veltri, A. L. Taktakishvili, A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Ion dynamics in the pre-substorm phase: Influence of magnetic turbulence and of the normal component of the magnetic field*, Proc. 5th International Conference on Substorms, St. Petersburg, Russia, 16-20 May, 2000. ESA SP 443, July 2000, pp. 225-228.

[18] A. V. Milovanov, *Stochastic dynamics from the fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equation: Large-scale behavior of the turbulent*

transport coefficient, Phys. Rev. E **63**, 047301/1 - 047301/4 (2001).

[19] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *"Strange" Fermi processes and power-law nonthermal tails from a self-consistent fractional kinetic equation*, Phys. Rev. E **64**, 052101/1 - 052101/4 (2001).

[20] A. V. Milovanov and J. J. Rasmussen, *Critical conducting networks in disordered solids: Ac universality from topological arguments*, Phys. Rev. B **64**, 212203/1 - 212203/4 (2001).

[21] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi, G. Zimbardo and P. Veltri, *Self-organized branching of magnetotail current systems near the percolation threshold*, J. Geophys. Res. **106**, 6291-6307 (2001).

[22] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi, P. Veltri, G. Zimbardo and A. L. Taktakishvili, *Geometric description of the magnetic field and plasma coupling in the near-Earth stretched tail prior to a substorm*, J. Atmos. Sol. Terr. Phys. **63**, 705-721 (2001).

[23] A. L. Taktakishvili, A. Greco, P. Veltri, G. Zimbardo, L. M. Zelenyi and A. V. Milovanov, *Magnetic turbulence and ion dynamics in the magnetotail*, Astrophys. Space Sci. **277**, 71-79 (2001).

[24] A. V. Milovanov and J. J. Rasmussen, *Fracton pairing mechanism for unconventional superconductors: Self-assembling organic polymers and copper-oxide compounds*, Phys. Rev. B **66**, 134505/1 - 134505/11 (2002).

[25] A. V. Milovanov and L. M. Zelenyi, *Nonequilibrium stationary states in the Earth's magnetotail: Stochastic acceleration processes and nonthermal distribution functions*, Adv. Space Res. **30** (12), 2667-2674 (2002).